

И. К. ДАУГАВЕТ, А. А. ЛАННЭ

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ВНЕШНИХ ПОМЕХ

Рассмотрены вопросы, связанные с синтезом алгоритмов ЦОС по соотношению *вход—выход* в условиях внешних помех, действующих на входные сигналы. Приведены: обзор результатов в этой области, аналитические и численные оценки точности алгоритмов, практические примеры применения теории.

При синтезе устройств цифровой обработки сигналов, цифровых моделей «аналоговых объектов», обработке сигналов на универсальных ЭВМ возникают задачи синтеза алгоритмов цифровой обработки сигналов (ЦОС). Как правило, такие алгоритмы реализуют операторы ЦОС, которые, в свою очередь, аппроксимируют желаемые отображения сигналов *вход—выход*. Необходимость аппроксимации возникает почти всегда. Это объясняется рядом обстоятельств.

Задача обработки сигналов состоит в преобразовании множества X входных сигналов $x(k)$ во множество Y^0 выходных сигналов $y^0(k)$ (k — дискретное время). Правило F , описывающее это преобразование, задается различными способами. Абстрактно — в виде бинарного отношения [1, 2]; конкретно — в виде аналитического соотношения, связывающего входные и выходные сигналы. В любом случае по правилу F должен быть построен алгоритм, удобный для практического применения.

Если обработка сигналов выполняется на ЭВМ, то необходим алгоритм, удобный для программирования (задействующий разумные объемы памяти, обеспечивающий вычисления за приемлемое время и т. д.), малочувствительный к ошибкам вычислений, устойчивый к внешним возмущениям сигналов.

Если же синтезируется устройство ЦОС (а часто и цифровая модель), то необходимо выполнение условий физической реализуемости.

Таким образом, для построения практически приемлемого алгоритма ЦОС необходима аппроксимация оператора F другим оператором F_ε , обладающим рядом дополнительных свойств.

Конечно же, главным является свойство близости операторов F и F_ε на классе сигналов X , т. е. выполнение условия

$$\|Fx - F_\varepsilon x\| = \|y^0 - F_\varepsilon x\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in X. \quad (1)$$

Общая теория построения операторов F_ε и их реализация для целей ЦОС рассмотрены в [1, 2].

Другим важным свойством оператора F_ε является устойчивость по отношению к возмущению сигналов x . С инженерной точки зрения это означает, что оператор F_ε должен конструироваться так, чтобы малые возмущения сигнала x приводили к малым возмущениям выходных сигналов. В принципе такая постановка вопроса представляется не бесперспективной, поскольку, в соответствии с [1, 2], соотношение (1) реализуется большим числом операторов F_ε . Следовательно, имеется возможность выбора наиболее устойчивого.

Целью публикации, обобщающей работы авторов [3—7], является получение для некоторых классов операторов F_ε теоретических оценок предельно достижимой точности отображения F в условиях действия помех заданной интенсивности, разработка инженерного метода чис-

ленного оценивания предельно достижимой точности отображения для конкретных операторов ЦОС.

Пусть задан некоторый класс X входных сигналов $x(k)$ ($k=0, 1, \dots, N$). Каждый сигнал будем оценивать числом (нормой) $\|x\| = \max|x(k)|$ либо $\|x\| = (\sum_k |x(k)|^2)^{1/2}$.

Пусть, кроме того, задан оператор F (соотношение *вход—выход*) $y^0(k) = F(x; k)$, $k=k_0, \dots, N$.

Интенсивность (уровень) помех Δx также будем оценивать нормой $\|\Delta x\| \leq \delta$. Класс алгоритмов ЦОС обозначим $G = \{F_\vartheta\}$. Операторы F_ϑ определены на более широком классе сигналов, чем X , например на классе сигналов, ограниченных по абсолютной величине или ограниченных по мощности.

Нас будет интересовать величина

$$E_G(F, \delta) = E_G = \min_{F_\vartheta \in G} \max_{x \in X} \max_{\|\Delta x\| \leq \delta} \max_{k_0 \leq k \leq N} |F(x; k) - F_\vartheta(x + \Delta x; k)|. \quad (2)$$

Она является характеристикой потенциальной точности (устойчивости) алгоритмов класса G , используемых для приближения оператора F , и на содержательном уровне может быть охарактеризована как минимально возможное значение максимальной ошибки отображения, реализуемое за счет рационального выбора алгоритма ЦОС в самых неблагоприятных условиях.

В работе рассмотрено три основных класса операторов (алгоритмов) ЦОС.

1. Класс причинных операторов $G_{\text{пр}}$, т. е. операторов

$$F_{\vartheta \text{ пр}}(x; k) = f_k(x(0), x(1), \dots, x(k)), \quad k = k_0, \dots, N. \quad (3)$$

2. Класс операторов с конечной памятью Δ ($0 \leq \Delta \leq N$) — G_Δ :

$$F_{\vartheta \Delta}(x; k) = f_k(x(k-\Delta), \dots, x(k)), \quad k = \Delta, \dots, N. \quad (4)$$

3. Класс стационарных операторов с конечной памятью Δ — $G_{\text{ст}\Delta}$:

$$F_{\vartheta \text{ ст}\Delta}(x; k) = f(x(k-\Delta), \dots, x(k)), \quad k = \Delta, \dots, N. \quad (5)$$

В данных определениях f_k , f — вещественные функции соответствующего числа переменных; индекс k говорит о том, что вид функции (ее параметры) зависит от рассматриваемого момента, т. е. операторы (3), (4) в общем случае — нестационарны.

Введенные классы операторов являются моделями реальных цифровых систем. Действительно, причинные операторы отображают системы, удовлетворяющие принципу причинности: реакция системы в момент k зависит только от воздействия в этот и предшествующие моменты. Операторы с конечной памятью являются моделями причинных нерекурсивных систем, отклики которых определяются только конечным числом отсчетов входных сигналов.

Наряду с определенными, рассмотрим подклассы этих операторов, а именно те, которые получены методом расщепления, причем расщепляющие операторы (расщепители) — линейны [1, 2].

Эти подклассы обозначим соответственно $G_{\text{пр}}^\sim$, G_Δ^\sim , $G_{\text{ст}\Delta}^\sim$.

Введем некоторые внутренние характеристики оператора F , ассоциированные с классами аппроксимирующих операторов.

Причинным модулем непрерывности оператора F называется функция $\omega_{\text{пр}}(F; \tau) = \max |F(x_1; k) - F(x_2; k)|$, где макс берется по $k \in [k_0 : N]$ и всем тем парам сигналов $x_1, x_2 \in X$, для которых $\|Q_k x_1 - Q_k x_2\| \leq \tau$, $\tau \geq 0$. Здесь

$$Q_k(x; l) = \begin{cases} x(l), & l \leq k; \\ 0, & l > k, \end{cases}$$

а норма вектора $Q_k x$ понимается в том же смысле, что и введенная

выше норма x , и потому для нормы оператора Q_k выполняется равенство $\|Q_k\|=1$.*

Модулем непрерывности конечной памяти оператора F называется функция $\omega_\Delta(F; \tau) = \max_{k \in [\Delta : N]} |F(x_1; k) - F(x_2; k)|$, где \max берется по всем $k \in [\Delta : N]$ и по тем парам $x_1, x_2 \in X$, для которых $\|Q_k x_1 - Q_k x_2\| \leq \tau$, $\tau \geq 0$. В этом случае, однако, Q_k задается другой формулой **

$$Q_k(x; l) = \begin{cases} x(t), & t \in [k - \Delta : k], \\ 0, & l \notin [k - \Delta : k]. \end{cases}$$

Стационарным модулем непрерывности оператора F называется функция $\omega_{\text{ст}\Delta}(F; \tau) = \max_{k_1, k_2 \in [\Delta : N]} |F(x_1; k_1) - F(x_2; k_2)|$, где \max берется по всем $k_1, k_2 \in [\Delta : N]$ и всем тем парам $x_1, x_2 \in X$, для которых $\|Q_{k_1} x_1 - Q_{k_2} x_2\| \leq \tau$, $\tau \geq 0$; Q_k задается формулой

$$Q_k(x; l) = \begin{cases} x(k - \Delta + l), & l \in [0 : \Delta]; \\ 0, & l > \Delta. \end{cases}$$

Введенные три класса операторов отличаются тем, какую информацию о входном сигнале x вправе использовать для построения отклика $F_s(x; k)$ в момент k . Неформальный смысл определенных модулей непрерывности состоит в том, что они показывают, насколько могут отличаться отклики на два разных сигнала, если известно, что для них соответствующая информация отличается не более, чем на τ . Поэтому все они вычисляются практически одинаково. Основное различие состоит в способе селекции сигналов-претендентов. В случае причинных операторов сопоставляются фрагменты сигналов на интервале $[0 : k]$. Для операторов с конечной памятью сравниваются фрагменты сигналов длиной Δ , оканчивающиеся в момент k . Наконец, для стационарных операторов сравниваются фрагменты сигналов длиной Δ , оканчивающиеся в моменты k_1 и k_2 , т. е. в произвольные из интервала $[\Delta : N]$ моменты.

Введенные модули непрерывности позволяют получать соотношение

$$E_G = \frac{1}{2} \omega(F; 2\delta). \quad (6)$$

Если $G = G_{\text{пр}}$, то в формуле (6) $\omega = \omega_{\text{пр}}$; если $G = G_\Delta$, то $\omega = \omega_\Delta$; если $G = G_{\text{ст}\Delta}$, то $\omega = \omega_{\text{ст}\Delta}$.

Идею доказательства формулы (6) поясним для случая причинных операторов. Пусть сигналы $x_1, x_2 \in X$ и момент k такие, что $\|Q_k x_1 - Q_k x_2\| \leq 2\delta$ и $\omega_{\text{пр}}(F; 2\delta) = |F(x_1; k) - F(x_2; k)|$. Тогда сигнал $x_0 = 0,5(x_1 + x_2)$ может быть воспринят как сигнал x_1 с помехой, не превосходящей δ , либо как x_2 , также с помехой, не превосходящей δ . Какое бы значение для $F_s(x_0; k)$ ни назначили, по крайней мере от одного из значений $F(x_1; k)$ или $F(x_2; k)$, оно будет отличаться не менее, чем на $0,5 \omega_{\text{пр}}(F; 2\delta)$. Поэтому $E_{G_{\text{пр}}} \geq 0,5 \omega_{\text{пр}}(F; 2\delta)$. Если для любого сигнала x_0 , близкого к классу X , положить

$$f_k(x_0(0), \dots, x_0(k)) = 0,5 [\max F(x; k) + \min F(x; k)],$$

где \max и \min берутся по всем тем сигналам $x \in X$, для которых $\|Q_k x - Q_k x_0\| \leq \delta$, то для соответствующего оператора F_s будет выполняться оценка $|F(x; k) - F_s(x + \Delta x; k)| \leq 0,5 \omega_{\text{пр}}(F; 2\delta)$, $\forall x \in X$, $\|\Delta x\| \leq \delta$, $k \in [k_0 : N]$.

* Результат действия оператора Q_k на сигнал x можно считать вектором. Далее ситуации, когда $x(l)$ — значение сигнала в момент l и когда $x(l)$ — фрагмент сигнала (т. е. вектор) специально не отмечаем.

** Для норм Q_x, Q справедливы условия, отмечавшиеся при определении модуля $\omega_{\text{пр}}$.

Полное доказательство формулы (6) в более общем случае приведено в [5].

Соотношение (6) получено для операторов, удовлетворяющих лишь приведенным выше условиям причинности, кенечности памяти и стационарности. Для операторов, а следовательно, и алгоритмов ЦОС, более узких классов этот результат не всегда применим.

Рассмотрим практически важные подклассы упомянутых классов операторов, характеризуемые тем, что аппроксимирующие операторы строятся методом линейного расщепления ([1]), т. е.

$$F_{\text{пр}}^{\sim}(x; k) = g_k \left(\sum_{l=0}^k a_{1l}^{(k)} x(l), \dots, \sum_{l=0}^k a_{nl}^{(k)} x(l) \right),$$

где $n \leq k_0 - 1$, $k \in [k_0 : N]$ — подкласс $G_{\text{пр}}^{\sim}$;

$$F_{\Delta}^{\sim}(x; k) = g_k \left(\sum_{l=0}^{\Delta} a_{1l}^{(k)} x(k - \Delta + l), \dots, \sum_{l=0}^{\Delta} a_{nl}^{(k)} x(k - \Delta + l) \right),$$

где $n \leq \Delta$ — подкласс G_{Δ}^{\sim} ;

$$F_{\text{ст}\Delta}^{\sim}(x; k) = g \left(\sum_{l=0}^{\Delta} a_{1l} x(k - \Delta + l), \dots, \sum_{l=0}^{\Delta} a_{nl} x(k - \Delta + l) \right),$$

где $n \leq \Delta$ — подкласс $G_{\text{ст}\Delta}^{\sim}$. Во всех формулах: g — вещественные функции n аргументов; n — число каналов расщепления; числа $a_{jl}^{(k)}$ (a_{jl}) задают расщепление. В частном случае g может быть многомерным полиномом, однако это не обязательно.

Можно показать: если аппроксимация оператора F осуществляется операторами перечисленных выше подклассов, то

$$E_{C^{\sim}}(F, \delta) \leq 0,5 \omega^{\sim}(F; 2\delta), \quad (7)$$

где ω^{\sim} — некоторый аналог рассмотренных ранее модулей непрерывности. Так, для $G^{\sim} = G_{\text{пр}}^{\sim}$ $\omega^{\sim} = \omega_{\text{пр}}$; для $G^{\sim} = G_{\Delta}^{\sim}$ $\omega^{\sim} = \omega_{\Delta}$; для $G^{\sim} = G_{\text{ст}\Delta}^{\sim}$ $\omega^{\sim} = \omega_{\text{ст}\Delta}$.

Вычисление указанных модулей непрерывности оказывается более сложным. Предварительно потребуется ввести некоторые новые обозначения и сделать ряд пояснений.

Операцию получения отсчетов $x(0), x(1), \dots, x(l)$ из последовательности отсчетов $x(0), \dots, x(N)$ обозначим $Q_l^{\text{пр}}$. Операцию получения отсчетов $x(l - \Delta), \dots, x(l)$ из той же последовательности — Q_l^{Δ} . Таким образом, $Q_l^{\text{пр}}$ и Q_l^{Δ} — некоторые операторы проектирования. Если упомянутые совокупности отсчетов рассматривать как векторы, то можно сказать, что операторы проектирования действуют на векторы размерности $N + 1$, в результате получаются векторы размерности $l + 1$ при действии $Q_l^{\text{пр}}$ и $\Delta + 1$ при действии Q_l^{Δ} .

Аргументы функции g можно также считать векторами, которые получены умножением матрицы $\|a_{jl}^{(k)}\| (\|a_{jl}\|)$ размерности $n \times (l + 1)$ либо $n \times (\Delta + 1)$ на вектор $Q_l^{\text{пр}} x$, либо $Q_l^{\Delta} x$, где $x = [x(0), \dots, x(N)]^T$. Введенные матрицы обозначим Φ с соответствующим индексом.

Тогда любая из формул для функции g может быть символически записана $g(\Sigma, \dots, \Sigma) = g(\Phi Q_x)$.

Для векторов ΦQ_x введем норму так, чтобы $\|\Phi Q_x\| \leq \|Q_x\|$ или, что то же, $\|\Phi\| \leq 1$. Теперь можно определить модули непрерывности ω^{\sim} .

$$\omega_{\text{ст}\Delta}^{\sim}(F; \tau) = \max |F(x_1; k_1) - F(x_2; k_2)|, \quad \tau \geq 0,$$

где \max берется по всем $k_1, k_2 \in [\Delta : N]$ и парам сигналов $x_1, x_2 \in X$, для которых $\|\Phi^{\text{ст}\Delta} Q_{k_1}^{\Delta} x_1 - \Phi^{\text{ст}\Delta} Q_{k_2}^{\Delta} x_2\| \leq \tau$. Следующий модуль непрерывности $\omega_{\text{пр}}^{\sim}$ вычисляется по формуле

$$\omega_{\text{пр}}^{\sim}(F; \tau) = \max |F(x_1; k) - F(x_2; k)|, \quad \tau \geq 0,$$

где \max берется по всем $k \in [k_0 : N]$ и всем тем парам сигналов $x_1, x_2 \in X$, для которых $\|\Phi_k^{\text{пр}} Q_k^{\text{пр}} x_1 - \Phi_k^{\text{пр}} Q_k^{\text{пр}} x_2\| \leq \tau$. Наконец, $\omega_{\Delta}^*(F; \tau) = \max |F(x_1; k) - F(x_2; k)|$, где \max берется по всем $k \in [\Delta : N]$ и всем тем парам сигналов $x_1, x_2 \in X$, для которых $\|\Phi_k^{\Delta} Q_k^{\Delta} x_1 - \Phi_k^{\Delta} Q_k^{\Delta} x_2\| \leq \tau$.

Если норма в n -мерном пространстве выбрана так, что она является максимальной в сравнении со всеми теми нормами, для которых $\|\Phi\| \leq 1$, то неравенство (7) превращается в равенство. Отметим один частный случай выбора такой максимальной нормы. Если $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x(k)|$ и при каждом j и k среди чисел $a_{jl}^{(k)}$ (или a_{jl}) одно равно единице, а остальные нули (например $F_{\text{ст} \Delta}(x; k) = g(x; (k-\Delta+l_1), \dots, x(k-\Delta+l_n))$, $0 \leq l_1 < \dots < l_n \leq \Delta$), то для n -мерного вектора z его максимальная норма также определяется равенством $\|z\| = \max |z(k)|$.

При численной оценке стационарного модуля непрерывности* с памятью Δ ($0 \leq \Delta < N$) оператора F считается, что область его определения и область его значений представляют конечные наборы сигналов $F: X \rightarrow Y$,

$$X = [x_1, \dots, x_m] \mid x_i = (x_i(0), \dots, x_i(N));$$

$$Y = \{y_1, \dots, y_m\} \mid y_i = (y_i(\Delta), \dots, y_i(N));$$

$$F(x_i; k) = y_i(k), \quad i \in [1 : m], \quad k \in [\Delta : N].$$

Норма входных сигналов определяется равенством $\|x\| = \max |x(k)|$.

В этом случае стационарный модуль непрерывности

$$\omega(\tau) = \omega_{\text{ст} \Delta}(F; \tau) = \max |y_p(j_1) - y_q(j_2)|, \quad (8)$$

где \max берется по всем $p, q \in [1 : m]$ и $j_1, j_2 \in [\Delta : N]$ таким, что

$$\max_{0 \leq l \leq \Delta} |x_p(j_1 - l) - x_q(j_2 - l)| \leq \tau. \quad (9)$$

Для непосредственного вычисления модуля непрерывности по формуле (8) в одной только точке τ необходимо организовать полный перебор фрагментов входных сигналов длины Δ , чтобы найти все пары фрагментов, удовлетворяющие условию (9). Объем вычислений можно существенно уменьшить, если воспользоваться свойством монотонности модуля непрерывности $\omega(\tau_1) \geq \omega(\tau_2)$ при $\tau_1 \geq \tau_2$, и организовать перебор по значениям выходных сигналов.

Пусть необходимо рассчитать модуль непрерывности $\omega(\tau)$ в точках τ_1, \dots, τ_k . В качестве начального приближения для $\omega(\tau_k)$ возьмем $\omega^0(\tau_k) = 0$, $k \in [1 : l]$. Рассмотрим произвольную пару значений выходных сигналов $y_p(j_1), y_q(j_2)$, $p, q \in [1 : m]$, $j_1, j_2 \in [\Delta : N]$ и фрагменты соответствующих им прообразов $x_p(\xi)$ ($\xi \in [j_1 - \Delta : j_1]$), $x_q(\xi)$ ($\xi \in [j_2 - \Delta : j_2]$). Обозначим

$$\delta_y = |y_p(j_1) - y_q(j_2)|, \quad \delta_x = \max_{0 \leq \xi \leq \Delta} |x_p(j_1 - \xi) - x_q(j_2 - \xi)|.$$

Справедливо неравенство $\omega(\tau_k) \geq \omega(\delta_x) \geq \delta_y$ при $\tau_k \geq \delta_x$. Следовательно, текущую оценку модуля непрерывности ω^0 можно откорректировать следующим образом:

$$\omega^0(\tau_k) = \begin{cases} \max \{\omega^0(\tau_k), \delta_y\}, & \tau_k \geq \delta_x; \\ \omega^0(\tau_k), & \tau_k < \delta_x. \end{cases}$$

Окончательная оценка модуля $\omega(\tau)$ получается после полного перебора всех пар значений выходных сигналов.

Заметим, что при таком способе вычислений значения модуля непрерывности оцениваются сразу на всем заданном множестве точек.

* Разработка алгоритма и программы выполнена Е. К. Тавастшерной, П. В. Яковлевым.

Вычисление причинного модуля непрерывности и модуля непрерывности конечной памяти проводится аналогично.

Описанный метод расчета модулей непрерывности реализован в виде программы на языке *C*.

Примеры. В примерах этой работы рассматриваются алгоритмы, реализуемые стационарными нерекурсивными цепями, т. е. стационарными операторами с конечной памятью.

1. *Амплитудный детектор гармонических колебаний.* Рассмотрим оператор идеализированного амплитудного детектора. Класс входных сигналов $X = \{x(k) = a \cos(\pi k/m + \alpha) | 0 < a^0 \leq a \leq a^1, 0 \leq \alpha < 2\pi\}$, выходные сигналы $F(x; k) = a, k = \Delta, \Delta + 1, \dots, T_g = \pi/m$ — шаг дискретизации. Найдем аналитическую оценку $\omega_{ct\Delta}(F; \tau)$ для случая, когда память оператора равна Δ и для входных сигналов норма определяется равенством $\|x\| = \max|x(k)|$. Для $x_i = a_i \cos(kT_g + \alpha_i)$, $i = 1, 2$ имеем

$$Q_{k_1}x_i = [a_i \cos((k_i - \Delta)T_g + \alpha_i), a_i \cos((k_i - \Delta + 1)T_g + \alpha_i), \dots,$$

$$[a_i \cos(k_i T_g + \alpha_i)] = [a_i \cos \beta_i, a_i \cos(T_g + \beta_i), \dots, a_i \cos(\Delta T_g + \beta_i)],$$

где $\beta_i = \alpha_i + (k_i - \Delta)T_g$; $Q_{k_1}x_1 - Q_{k_2}x_2 = [b \cos \gamma, b \cos(T_g + \gamma), \dots, b \cos(\Delta T_g + \gamma)]$, где $b^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\beta_1 - \beta_2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \tau \geq \|Q_{k_1}x_1 - Q_{k_2}x_2\| &\geq b \sin(\Delta T_g/2), |F(x_1; k_1) - F(x_2; k_2)| = \\ &= |a_1 - a_2| \leq b \leq \tau / \sin(\Delta T_g/2). \end{aligned}$$

В то же время, если a_1 и a_2 выбрать так, что $|a_1 - a_2| = \tau / \sin(\Delta T_g/2)$ и положить $x_i(k) = a_i \sin(k - \Delta/2)T_g$, то $\|Q_{m+\Delta}x_1 - Q_{m+\Delta}x_2\| = \tau$ и $|F(x_1; m+\Delta) - F(x_2; m+\Delta)| = \tau / \sin(\Delta T_g/2)$. Таким образом, доказано, что

$$\omega_{ct\Delta}(F; \tau) = \begin{cases} \tau / \sin(\Delta T_g/2), & \text{если } \tau / \sin(\Delta T_g/2) < a^1 - a^0, \Delta T_g < \pi; \\ \tau, & \text{если } \tau < a^1 - a^0, \Delta T_g > \pi; \\ a^1 - a^0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и, следовательно,

$$E_{G_{ct\Delta}} = \begin{cases} \delta / \sin(\Delta T_g/2), & \text{если } \delta / \sin(\Delta T_g/2) < (a^1 - a^0)/2, \Delta T_g \leq \pi; \\ \delta, & \text{если } \delta < (a^1 - a^0)/2, \Delta T_g > \pi; \\ (a^1 - a^0)/2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10)$$

Анализ формулы (10) приводит к ряду важных выводов.

Точность алгоритма детектирования (измерения амплитуды гармонических колебаний) в условиях внешних помех может быть повышена за счет увеличения памяти оператора Δ . На самом деле возможность повышения точности обработки за счет увеличения памяти оператора F , просматривается и в общем выражении для модуля непрерывности. Однако в формуле (10) она представлена точно.

Увеличение памяти в рассмотренном примере целесообразно лишь до определенной величины: $\Delta T_g \leq \pi$. Действительно, дальнейшее увеличение памяти не приводит к повышению точности.

Понятно физическое содержание формулы (10): если помеха $\Delta x(k) = \delta \cos(kT_g + \alpha)$, то даже при абсолютно точном детектировании сигнала $x(k) \pm \Delta x(k)$ лучшее, что можно сделать, — измерить амплитуду $a \pm \delta$.

Тот же пример для случая $a^0 = 0.1$, $a^1 = 1$, $T_g = \pi/10$, $\Delta = 2, 4, 8, 16$ решен численным методом, т. е. численно определены функции $\omega_{ct\Delta}(F; \tau)$. Результаты расчетов в виде графиков показаны на рис. 1.

2. *Амплитудный детектор — преобразователь гармонических сигналов.* Предыдущий пример обобщается следующим образом.

$$\begin{aligned} X = \{x(k) = a \cos(kT_g + \alpha) | 0 < a^0 \leq a \leq a^1, \\ 0 \leq \alpha < 2\pi, T_g = \pi/m\}, \end{aligned}$$

а оператор F задан соотношением $F(a \cos(kT_g + a)) = f(a)$, где $f(a)$ — заданная непрерывная функция. Если $\omega_{ct\Delta}(F; \tau)$ — модуль непрерывности функции f , то тем способом, что и выше, можно показать, что при $\tau \leq (a^1 - a^0) \sin(\Delta T_g/2)$, $\Delta T_g \leq \pi$, $\omega_{ct\Delta}(F; \tau) = \omega(f; \tau / \sin(\Delta T_g/2))$. Так для квадратичного детектора, у которого $F(a \cos(kT_g + a)) = a^2$, ста-

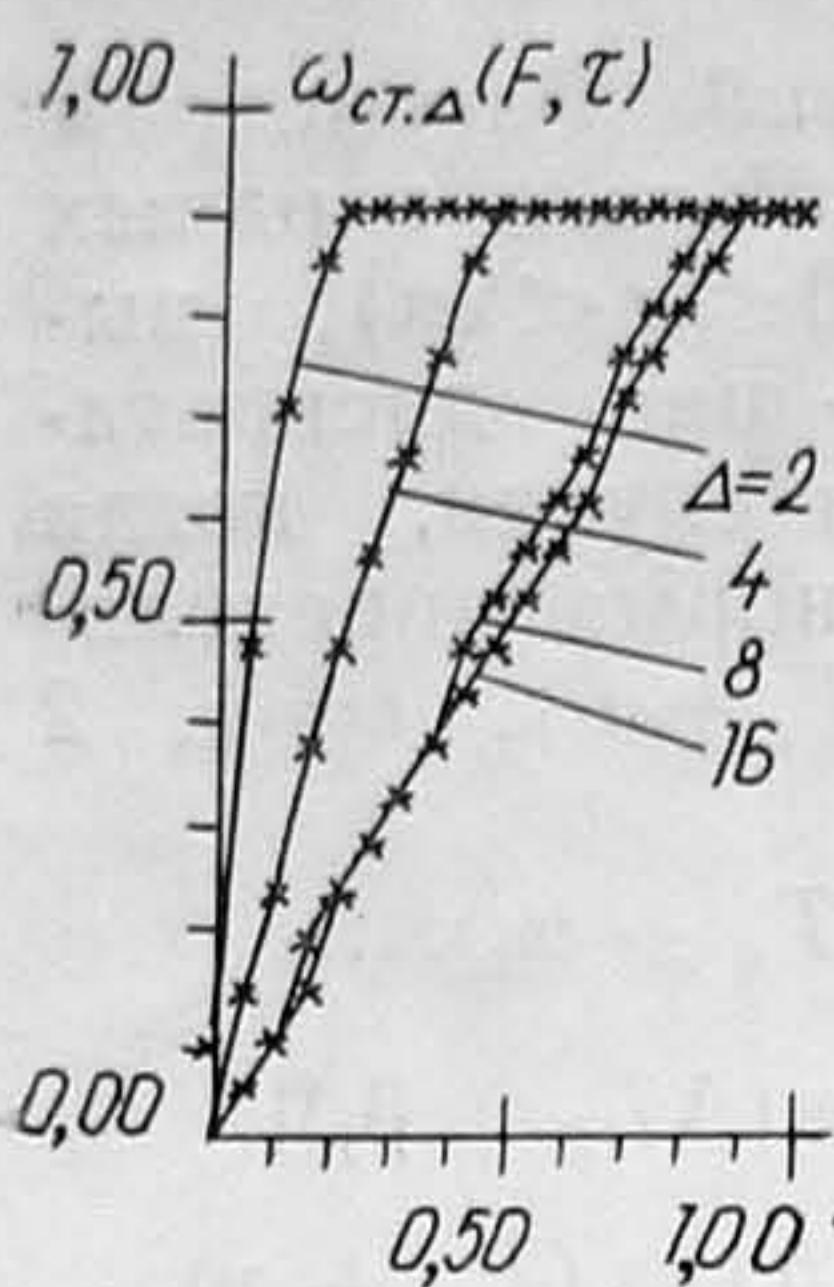


Рис.1

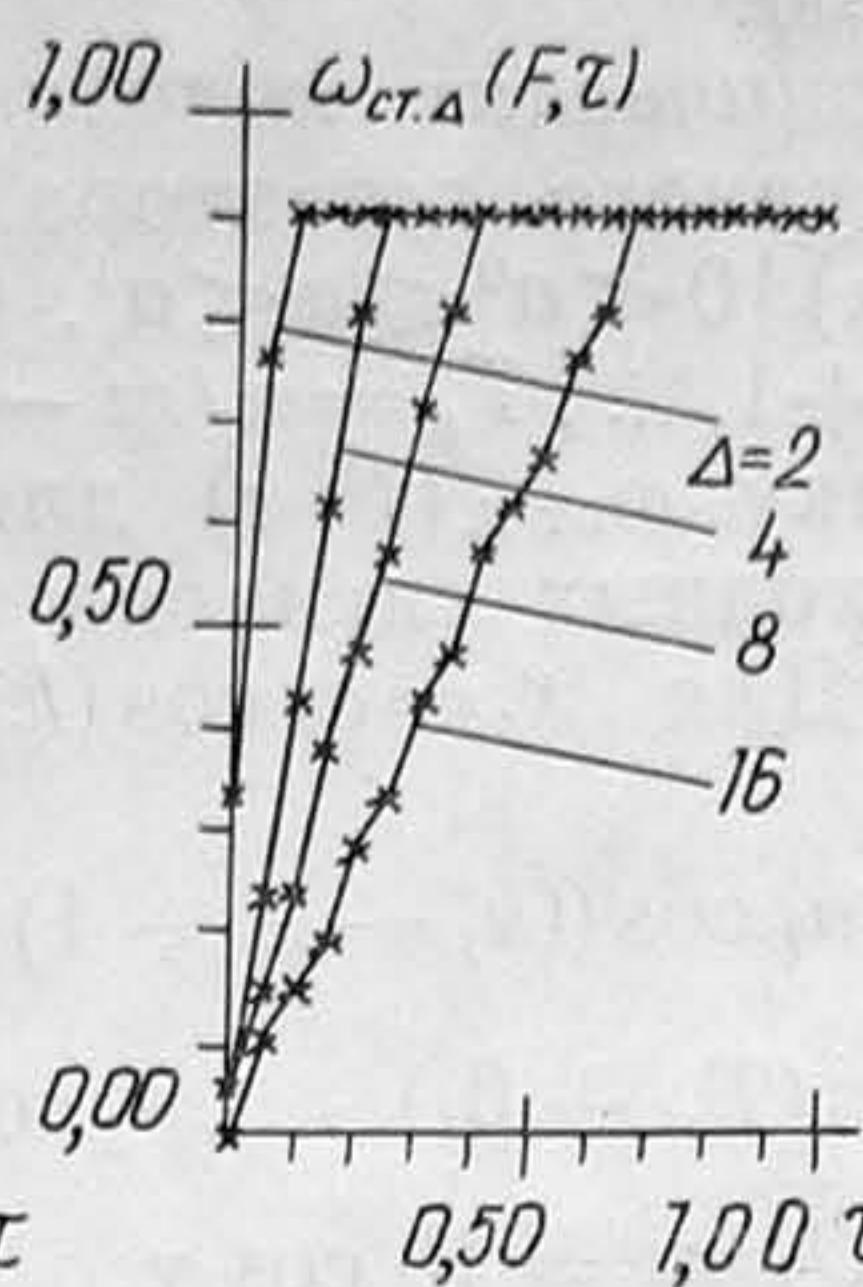


Рис.2

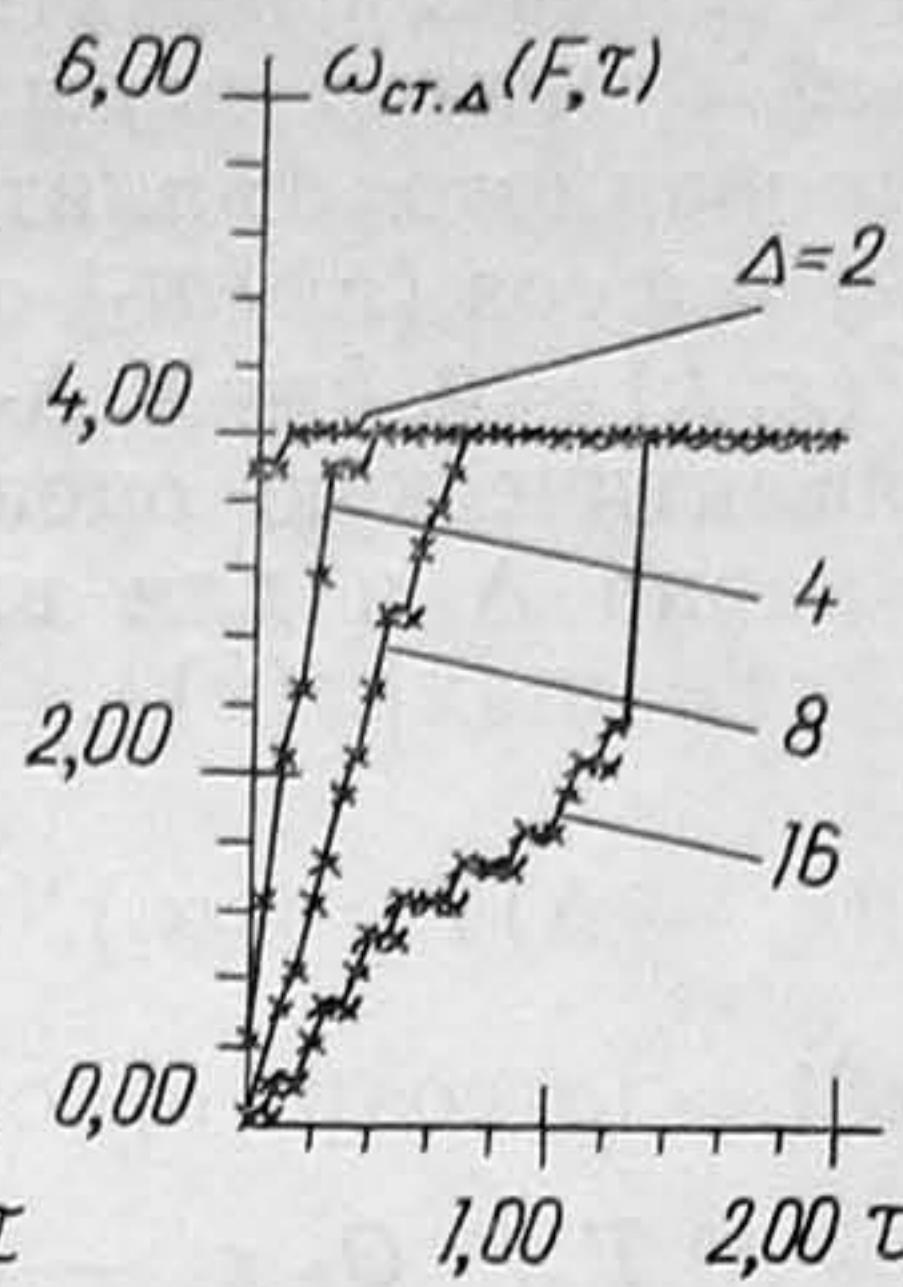


Рис.3

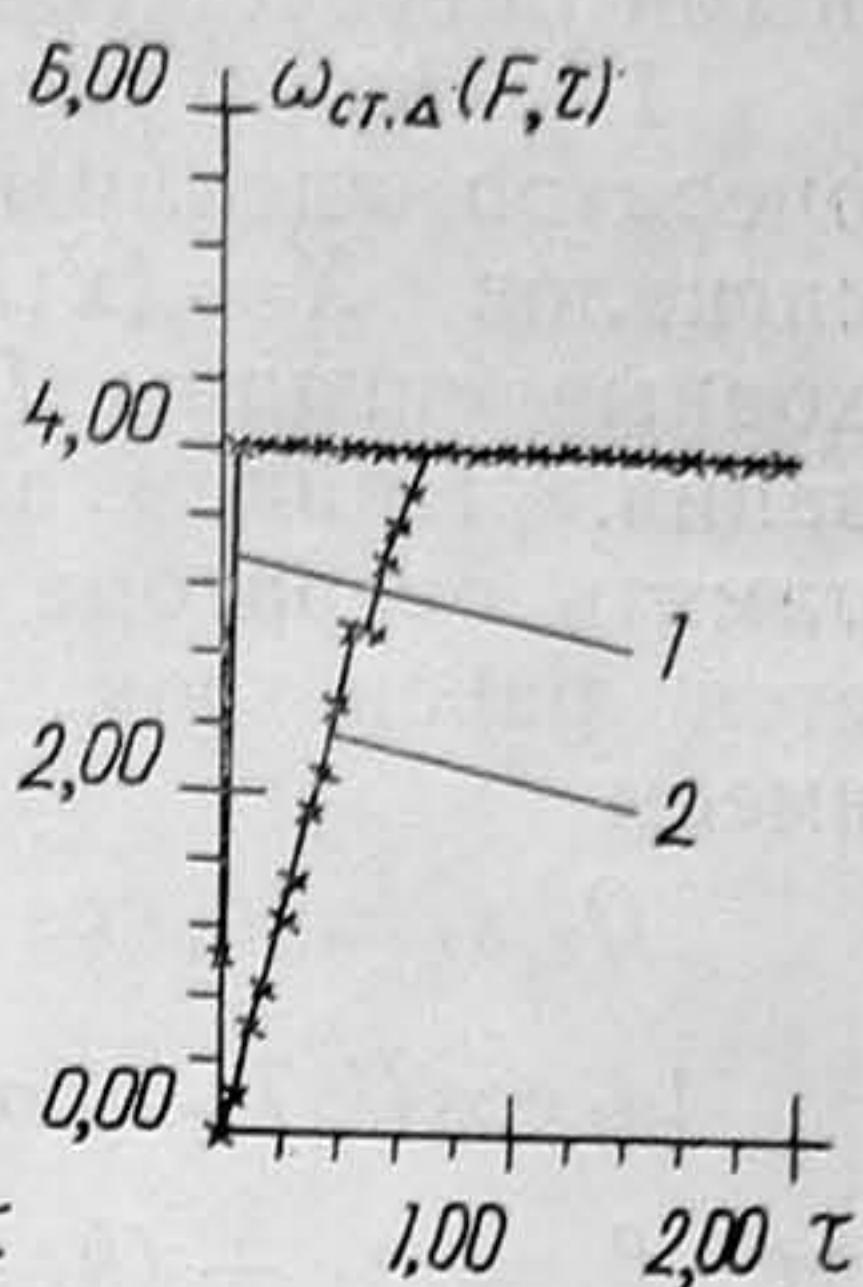


Рис.4

ционарный модуль непрерывности $\omega_{ct\Delta}(F; \tau) = (2a^1 - \tau / \sin(\Delta T_g/2)) \times \tau / \sin(\Delta T_g/2)$.

3. Амплитудный детектор сигналов — «затухающих синусоид». В этом примере

$$X = \{x(k) = a \exp(-kT_g) \sin kT_g \mid 0,1 \leq a \leq 1, kT_g \in [0, 2\pi], \\ T_g = \pi/10\}, F(a \exp(-kT_g) \sin kT_g) = a.$$

Расчет стационарного модуля непрерывности проводился численным методом для случаев $\Delta=2, 4, 8, 16$. Результаты представлены на рис. 2.

4. Частотный детектор. Множество входных сигналов

$$X = \{x(k) = a \cos(fkT_g + \alpha) \mid 0 < a^0 \leq a \leq a^1, \\ 2\pi \leq f \leq f^1, 0 \leq \alpha < 2\pi\},$$

оператор F задан соотношением $F(a \cos(fkT_g + a)) = f$. Для данного примера точного выражения $\omega_{ct\Delta}(F; \tau)$ получить не удалось, однако были аналитически найдены верхняя и нижняя оценки для $\omega_{ct\Delta}(F; \tau)$: $\omega_\Delta(\tau) \leq \omega_{ct\Delta}(F; \tau) \leq \bar{\omega}_\Delta(\tau)$. Эти оценки очень близки между собой для $\Delta T_g \geq 2\pi$ и малых шагов дискретизации и при $\Delta T_g \rightarrow \infty$ асимптотически равны $2\tau / (a^0 \Delta T_g)$. Приведем значение этих оценок при $a^0 = 1$

ΔT_g	τ	$\omega_\Delta(\tau)$	$\bar{\omega}_\Delta(\tau)$
2π	0,01	0,034	0,041
	0,1	0,36	0,42
4π	0,01	0,013	0,014
	0,1	0,13	0,14
10π	0,01	0,0044	0,0045
	0,1	0,044	0,045

Этот же пример при малых ΔT_g решен с использованием программы численного построения функции $\omega_{ct\Delta}(F; \tau)$. Результаты рассчитаны при $T_g = \pi/10$, $\Delta = 2, 4, 8, 16$ для случаев $F(\cos fkT_g) = f$, $f \in [1, 5]$, $F(a \cos fkT_g) = f$, $f \in [1, 5]$, $a \in [0, 1, 1]$ и представлены на рис. 3, 4.

Анализ кривых (рис. 3) позволяет проследить влияние памяти оператора на точность обработки: с ростом памяти точность растет. Из графиков (рис. 4) видно влияние возможного изменения амплиту-

ды обрабатываемого сигнала на точность выделения (измерения) частоты: разброс амплитуд ухудшает потенциально достижимую точность детектирования.

5. Амплитудный детектор гармонических колебаний. Рассмотрим пример 2 в предположении, что класс стационарных операторов с конечной памятью сужен до класса $G_{\text{ст}\Delta}$, т. е. аппроксимирующий оператор строится методом расщепления $F_{\text{ст}\Delta}(x; k) = g(x(k-\Delta), x(k))$, $\Delta < m$. Легко проверяется, что для заданного множества X входных сигналов векторы $[x(k-\Delta), x(k)]^t$, $k \in [0 : 2m-1]$ расщеплены. Выполнив вычисление модуля непрерывности $\omega_{\text{ст}\Delta}$, получим точное соотношение

$$E_{G_{\text{ст}\Delta}}(E, \delta) = 0.5\omega(f; \min\{2\delta[\min(|\sin(\Delta T_g/2)|, |\cos(\Delta T_g/2)|)\}^{-1}, a^1 - a^0\}),$$

где $\omega(f; \tau)$ — модуль непрерывности функции f . В частности, для обычного линейного детектора ($f(a) = a$) и относительно малых помех имеем $E_{G_{\text{ст}\Delta}}(F, \delta) = \delta[\min(|\sin(\Delta T_g/2)|, |\cos(\Delta T_g/2)|)]^{-1}$. Заметим, что для произвольной функции $f(a)$, если память $\Delta \leq m/2$, т. е. не превосходит четверти периода, выполняется равенство $E_{G_{\text{ст}\Delta}}(F, \delta) = E_{G_{\text{ст}\Delta}}(F, \delta)$. Оно означает:

для детектирования сигнала $x(k)$ при памяти $\Delta \leq m/2$ «промежуточные» отсчеты сигнала $x(k-\Delta+1), \dots, x(k-1)$ не позволяют увеличить точность детектирования в условиях помех.

С увеличением памяти детектирование с помощью класса алгоритмов, использующих расщепление в виде двух отсчетов, оказывается менее точным, чем потенциальное. Действительно, по результатам примера 1 имеем точность, оцениваемую соотношением (10). Таким образом, при использовании расщепления в виде двух отсчетов сигнала в самом благоприятном случае, когда отсчеты берутся в точках, отстоящих на четверть периода, наилучшая точность детектирования не может превышать $\delta/\sqrt{2}$ [2]. Потенциальная же точность при $\Delta T_g = \pi$ и $\delta \leq (a^1 - a^0)/2$ равна δ .

6. Фазовый детектор. Множество входных сигналов $X = \{x(k) = a \cos(kT_g + \alpha) | 0 < a^0 \leq a \leq a^1\}$, оператор F задан соотношением $F(a \cos(kT_g + \alpha)) = a$. Будем считать α точкой окружности, так что, например, при малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ для $a_1 = \varepsilon_1, a_2 = 2\pi - \varepsilon_2$ полагаем $|a_1 - a_2| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Оператор F не является стационарным, рассмотрим его приближение нестационарными операторами с конечной памятью Δ . Результат в этом случае приведем не для модуля непрерывности $\omega_\Delta(F; \tau)$, а непосредственно для $E_{G_\Delta}(F, \delta)$ и лишь для не слишком больших δ . При фиксированном ΔT_g и $T_g \rightarrow 0$ справедливо предельное равенство

$$E_{G_\Delta}(F, \delta) = \begin{cases} \arcsin(\delta/[a^0 \sin(\Delta T_g/2)]), & \text{если } \Delta T_g \leq \pi, \delta < a^0 \sin(\Delta T_g/2); \\ \arcsin(\delta/a^0), & \text{если } \Delta T_g \geq \pi, \delta < a^0. \end{cases}$$

Как видно из формулы, дальнейшее увеличение памяти по сравнению со случаем $\Delta T_g = \pi$ не приводит к улучшению возможности приближения оператора F операторами с конечной памятью Δ .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Ланнэ А. А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация, идентификация.—Л.: ВАС, 1985.—240 с.
- Ланнэ А. А. Синтез систем нелинейной цифровой обработки сигналов // Радиоэлектроника.—1985.—№ 8.—С. 6—17. (Изв. высш. учеб. заведений).
- Даугавет И. К. О причинном продолжении операторов // Докл. АН СССР.—1985.—Т. 283.—№ 6.—С. 1299—1301.
- Даугавет И. К. О приближении операторов причинными операторами и их обобщениями. 1. Линейный случай // Численные методы анализа и их приложения.—Иркутск, 1987.—С. 113—126.
- Даугавет И. К. О приближении операторов причинными операторами и их обобщениями. 2. Нелинейный случай // Методы оптимизации и их приложения.—Иркутск, 1988.—С. 167—178.

6. Даугавет И. К., Ланнэ А. А. О потенциальной точности цифровой обработки сигналов в условиях внешних помех // Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов. Тез. докл. конференции.— Рига, 1989.— Т. 1.— С. 100—102.

7. Daugavet I. K., Lanne A. A. Potential accuracy estimations of digital signal processing algorithms // Proc. Latvian Signal Processing Internat. Conf.— Riga.— 1990.— V. 2.— P. 65—69.

Поступила в редакцию 12.03.91.

УДК 621.391.246:519.224

А. А. АЛЕКСЕЕВ, А. Б. КИРИЛЛОВ, С. Ю. ЧЕЧЕНЕВ

ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЩНОСТИ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

Введено понятие совместного частотно-временного распределения мощности сигнала в базисе функций Уолша на основе операции «вычитания» по модулю 2. Проанализированы основные свойства распределения. Определены основные условия его применимости для анализа структуры радиосигнала. Приведены результаты экспериментальных исследований на ЭВМ, подтверждающие целесообразность применения в задачах анализа введенного частотно-временного распределения.

Интерес к функциям частотно-временного распределения мощности (ЧВР) сигналов связан с появлением новых возможностей анализа в сложной помеховой обстановке [1]. Их применение часто предполагает использование методов либо оптической, либо цифровой обработки информации. Так как в основе ЧВР лежат преобразования Фурье, то при цифровой обработке сигналов (ЦОС) удается воспользоваться эффективными вычислительными процедурами БПФ. Естественно стремление исследователей к дальнейшему увеличению скорости анализа данных. Это возможно, в частности, при переходе на иной класс спектральных преобразований, который лучше согласуется с требованиями ЦОС. Наиболее изученными в данном отношении являются базисы функций спектрального разложения Уолша. Поэтому цель работы состоит в обобщении ЧВР на базис функций Уолша.

Среди множества ЧВР важную роль в теории и практике анализа сигналов отводят распределению Вигнера [2]

$$\rho(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a(t + \tau/2) z_a^*(t - \tau/2) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (1)$$

где $z_a(t)$ — аналитический сигнал анализируемого действительного процесса $z(t)$ конечной энергии; $*$ — знак комплексного сопряжения. Распределение Вигнера обладает рядом свойств, которые делают его уникальным инструментом вскрытия частотно-временной структуры нестационарных процессов. Например, сдвиг сигнала по частоте и (или) по времени приводит к соответствующему сдвигу распределения; средние распределения по времени или частоте определяют соответственно значения спектральной мощности сигнала на заданной частоте или мощности его огибающей в заданный временной отсчет; моменты первых порядков функции Вигнера приводят к известным понятиям мгновенной частоты и группового времени задержки. Наконец, (1) — действительная функция, значения которой локализуются в точках частотно-временной плоскости, определяемых мгновенными частотами действующих процессов. Характеристической функцией распределения Вигнера является хорошо известная в теории радиолокации функция неопределенности (Φ Н).

При вычислении выражения (1) обычно пользуются его дискретным аналогом

$$\rho(k, n) = \sum_{\tau=-N/2}^{N/2} z_a(\tau + n) z_a^*(n - \tau) \text{def}(k, \tau), \quad (2)$$